(解説)

$\boxed{1}$ (1) $(2x-3)^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2=4x^2-12x+9$

(2) $(3x+5)(x-4)=(3\times 1)x^2+\{3\times(-4)+5\times 1\}x+5\times(-4)$

$=3x^2-7x-20$

(3) $(3a-1)^3=(3a)^3-3\times(3a)^2\times 1+3\times(3a)\times 1^2-1^3$

$=27a^3-27a^2+9a-1$

(4) $(x+7)(x^2-7x+49)=(x+7)(x^2-x\times 7+7^2)=x^3+7^3$

$=x^3+343$

(解説)

$\boxed{2}$ (1) $x^2-8x+16=x^2-2\times x\times 4+4^2=(x-4)^2$

(2) $x^2+x-42=x^2+(7-6)x+7\times(-6)$

$=(x+7)(x-6)$

(3) $5x^2-6x-8$

$=(x-2)(5x+4)$

(4) $1-a^3=1^3-a^3=(1-a)(1^2+1\times a+a^2)$

$=(1-a)(1+a+a^2)$

(3)
$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -10 \\ 5 & & 4 & \longrightarrow & 4 \\ \hline 5 & & -8 & & -6 \end{array}$$

(解説)

$\boxed{3}$ a^3b^2 の項は，二項定理から ${}_5C_2a^3b^2$ である。

よって，求める係数は　${}_5C_2=\dfrac{5\times 4}{2\times 1}=10$

(解説)

$\boxed{4}$

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^2+2x+\ \ 6 \\ \hline x-2 & x^3 \qquad\quad +2x-\ \ 5 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & \qquad 2x^2+2x \\ & \qquad 2x^2-4x \\ \hline & \qquad\qquad 6x-\ \ 5 \\ & \qquad\qquad 6x-12 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 7 \end{array}$$

したがって　$Q=x^2+2x+6$，$R=7$

また，$A=BQ+R$ の形に表すと　$x^3+2x-5=(x-2)(x^2+2x+6)+7$

(解説)

$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{x-2}{x+3}\times\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-x-2}=\dfrac{x-2}{x+3}\times\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x-2)\times(x+3)(x-5)}{(x+3)\times(x+1)(x-2)}$

$=\dfrac{x-5}{x+1}$

(2) $\dfrac{x+7}{x-1} \div \dfrac{x^2+3x-28}{x^2+2x-3} = \dfrac{x+7}{x-1} \times \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-28} = \dfrac{x+7}{x-1} \times \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-4)}$

$$= \frac{(x+7)\times(x+3)(x-1)}{(x-1)\times(x+7)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}$$

(解説)

$\boxed{6}$ (1) $\dfrac{2}{x+4} + \dfrac{1}{3x-2} = \dfrac{2\times(3x-2)}{(x+4)(3x-2)} + \dfrac{1\times(x+4)}{(3x-2)(x+4)}$

$$= \frac{6x-4}{(x+4)(3x-2)} + \frac{x+4}{(3x-2)(x+4)}$$

$$= \frac{(6x-4)+(x+4)}{(x+4)(3x-2)} = \frac{7x}{(x+4)(3x-2)}$$

(2) $\dfrac{3}{5x+1} - \dfrac{2}{2x-3} = \dfrac{3\times(2x-3)}{(5x+1)(2x-3)} - \dfrac{2\times(5x+1)}{(2x-3)(5x+1)}$

$$= \frac{6x-9}{(5x+1)(2x-3)} - \frac{10x+2}{(2x-3)(5x+1)}$$

$$= \frac{(6x-9)-(10x+2)}{(5x+1)(2x-3)} = \frac{-4x-11}{(5x+1)(2x-3)}$$

(解説)

$\boxed{7}$ $(9a^2-9a+4)-3a = 9a^2-12a+4 = (3a-2)^2 \geqq 0$

したがって　　$9a^2-9a+4 \geqq 3a$

(解説)

$\boxed{8}$ (1) $x=-7$, $y=-\sqrt{5}$

(2) $x-2=\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{3}$　　　よって　$x=\dfrac{5}{2}$, $y=-\dfrac{1}{3}$

(解説)

$\boxed{9}$ (1) $(7-6i)+(-5+3i)=(7-5)+(-6+3)i=2-3i$

(2) $(-10-8i)-(11+i)=(-10-11)+(-8-1)i=-21-9i$

(3) $(3+2i)(-1+i)=-3+3i-2i+2i^2=-3+i+2\times(-1)=-5+i$

(4) $\dfrac{2+i}{3-i}=\dfrac{(2+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{6+2i+3i+i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{5+5i}{10}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

(解説)

$\boxed{10}$ (1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times5}}{2\times1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

(2) $x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\dfrac{7\pm\sqrt{41}}{2}$

(3) $x=\dfrac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times9\times4}}{2\times9}=\dfrac{-12\pm\sqrt{0}}{18}=-\dfrac{2}{3}$

(4) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times2\times7}}{2\times2}=\dfrac{5\pm\sqrt{-31}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{31}\,i}{4}$

解説

$\boxed{11}$ (1) 左辺 x^3-5x^2+6x を x でくくると　$x(x^2-5x+6)=0$

さらに，x^2-5x+6 を因数分解して　$x(x-2)(x-3)=0$

よって　$x=0$　または　$x-2=0$　または　$x-3=0$

求める解は　$x=0,\ 2,\ 3$

(2) 左辺 x^4+3x^2-28 を因数分解すると　$(x^2-4)(x^2+7)=0$

さらに，x^2-4 を因数分解して　$(x+2)(x-2)(x^2+7)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x-2=0$　または　$x^2+7=0$

求める解は　$x=\pm2,\ \pm\sqrt{7}\,i$

(3) $P(x)=x^3+8x^2+5x-14$ とおく。

$P(1)=1^3+8\times1^2+5\times1-14=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

右のわり算から

$P(x)=(x-1)(x^2+9x+14)$

よって　$(x-1)(x^2+9x+14)=0$

さらに，$x^2+9x+14$ を因数分解して

$(x-1)(x+2)(x+7)=0$

求める解は　$x=1,\ -2,\ -7$

$$\begin{array}{r} x^2+9x+14 \\ x-1\,\overline{)\,x^3+8x^2+5x-14} \\ \underline{x^3-x^2} \\ 9x^2+5x \\ \underline{9x^2-9x} \\ 14x-14 \\ \underline{14x-14} \\ 0 \end{array}$$

(4) $P(x)=x^3+2x-3$ とおく。

$P(1)=1^3+2\times1-3=0$

よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数である。

右のわり算から

$P(x)=(x-1)(x^2+x+3)$

よって　$(x-1)(x^2+x+3)=0$

したがって　$x-1=0$　または　$x^2+x+3=0$

求める解は　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

$$\begin{array}{r} x^2+x+3 \\ x-1\,\overline{)\,x^3+2x-3} \\ \underline{x^3-x^2} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2-x} \\ 3x-3 \\ \underline{3x-3} \\ 0 \end{array}$$

解説

$\boxed{12}$ (1) $\alpha+\beta=-\dfrac{-3}{2}=\dfrac{3}{2}$

(2) $\alpha\beta=\dfrac{8}{2}=4$

(3) (1), (2) から　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)\alpha\beta=\dfrac{3}{2}\times4=6$

(4) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ であるから　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

(1), (2) から　$\alpha^2+\beta^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-2\times4=-\dfrac{23}{4}$

(解説)

$\boxed{13}$ (1) $AB=\sqrt{(2-7)^2+\{1-(-1)\}^2}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$

(2) $OC=\sqrt{3^2+(-8)^2}=\sqrt{73}$

(解説)

$\boxed{14}$ (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=\frac{3\times1+1\times(-3)}{1+3}=\frac{0}{4}=0,\qquad y=\frac{3\times7+1\times(-5)}{1+3}=\frac{16}{4}=4$$

よって，点 P の座標は　$(0,\ 4)$

(2) 点 M の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=\frac{1+(-3)}{2}=\frac{-2}{2}=-1,\qquad y=\frac{7+(-5)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

よって，点 M の座標は　$(-1,\ 1)$

(3) 点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=\frac{-2\times(-3)+1\times6}{1-2}=\frac{12}{-1}=-12,$$

$$y=\frac{-2\times(-5)+1\times(-8)}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

よって，点 Q の座標は　$(-12,\ -2)$

(4) 点 G の座標を $(x,\ y)$ とする。

$$x=\frac{1+(-3)+6}{3}=\frac{4}{3},\qquad y=\frac{7+(-5)+(-8)}{3}=\frac{-6}{3}=-2$$

よって，重心 G の座標は　$\left(\frac{4}{3},\ -2\right)$

(解説)

$\boxed{15}$ (1) 連立方程式 $\begin{cases} y=2x-5 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を解く。

①，② から y を消去すると　$2x-5=-x+7$

$3x=12$

よって　$x=4$

これを，① に代入すると　$y=2\times4-5=3$

よって，交点の座標は　$(4,\ 3)$

(2) 連立方程式 $\begin{cases} y=-5x+2 & \cdots\cdots ① \\ x=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を解く。

② を ① に代入すると　$y=-5\times(-1)+2=7$

よって，交点の座標は　$(-1,\ 7)$

(解説)

$\boxed{16}$ (1) 求める直線の傾きは -1 であるから　$y-(-5)=-\{x-(-3)\}$

したがって　$y=-x-8$

(2) 求める直線の傾きを m とすると　$3\times m=-1$

よって　　$m=-\dfrac{1}{3}$

したがって，求める直線の方程式は　　$y-(-5)=-\dfrac{1}{3}\{x-(-3)\}$

よって　　$y=-\dfrac{1}{3}x-6$

解説

$\boxed{17}$ (1)　求める円の方程式は　　$\{x-(-2)\}^2+(y-1)^2=6^2$

よって　　$(x+2)^2+(y-1)^2=36$

(2)　求める円の方程式は　　$(x-3)^2+\{y-(-5)\}^2=(\sqrt{7})^2$

よって　　$(x-3)^2+(y+5)^2=7$

(3)　A$(5,\ 1)$，B$(-3,\ 7)$として，求める円の中心をCとすると，Cは線分ABの中点

であるから　　$C\left(\dfrac{5+(-3)}{2},\ \dfrac{1+7}{2}\right)$

すなわち　　C$(1,\ 4)$

また，求める円の半径は線分CAの長さであるから

$$CA=\sqrt{(5-1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

したがって，求める円の方程式は　　$(x-1)^2+(y-4)^2=5^2$

よって　$(x-1)^2+(y-4)^2=25$

解説

$\boxed{18}$ (1)　方程式を変形すると　　$(x-6)^2+(y+1)^2=(\sqrt{11})^2$

したがって，方程式は中心が点$(6,\ -1)$，半径が$\sqrt{11}$の円を表す。

(2)　方程式を変形すると　　$(x^2-10x)+(y^2+4y)=0$

$$(x^2-10x+5^2)+(y^2+4y+2^2)=5^2+2^2$$

よって　$(x-5)^2+(y+2)^2=(\sqrt{29})^2$

したがって，方程式は中心が点$(5,\ -2)$，半径が$\sqrt{29}$の円を表す。

解説

$\boxed{19}$ (1)　$\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos A=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$，$\tan A=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos A=\dfrac{7}{8}$，$\tan A=\dfrac{\sqrt{15}}{7}$

解説

$\boxed{20}$ $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると　　$\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$

よって　　$\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{5}\right)^2=1-\dfrac{21}{25}=\dfrac{4}{25}$

θ の動径が第3象限にあるから　　$\cos\theta<0$

よって　　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{4}{25}}=-\dfrac{2}{5}$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta=\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{5}\right)\div\left(-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

(解説)

$\boxed{21}$ (1)　$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

α の動径が第4象限にあるから　　$\sin\alpha<0$

よって　　$\sin\alpha=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

したがって　　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

(2)　$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1=-\dfrac{1}{9}$

(解説)

$\boxed{22}$ 弧の長さは　$3\times\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$　　　面積は　$\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{15}{4}\pi$

(解説)

$\boxed{23}$ (1)　$2^{-7}\times2^4=2^{-7+4}=2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

(2)　$(3^{-4})^{-1}=3^{-4\times(-1)}=3^4=81$

(3)　$5^{-3}\div5^{-5}=5^{-3-(-5)}=5^2=25$

(解説)

$\boxed{24}$ (1)　$\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{16\times4}=\sqrt[3]{4^3}=4$

(2)　$\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{729}}=\sqrt[4]{\dfrac{9}{729}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{1}{3}$

(3)　$2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{8}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{8}{3}}=2^3=8$

(4)　$\sqrt[3]{625}\div\sqrt[6]{25}=625^{\frac{1}{3}}\div25^{\frac{1}{6}}=(5^4)^{\frac{1}{3}}\div(5^2)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{4}{3}}\div5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=5^1=5$

(解説)

$\boxed{25}$ (1)　$32^x=(2^5)^x=2^{5x}$，$8=2^3$ であるから，方程式は　　$2^{5x}=2^3$

よって　　$5x=3$

したがって　　$x=\dfrac{3}{5}$

(2)　$9^x=(3^2)^x=3^{2x}$，$\dfrac{1}{3}=3^{-1}$ であるから，方程式は　　$3^{2x}=3^{-1}$

よって　　$2x=-1$

したがって　　$x=-\dfrac{1}{2}$

解説

$\boxed{26}$ (1) $\log_3 21 - \log_3 7 = \log_3 \dfrac{21}{7} = \log_3 3 = 1$

(2) $\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 = \log_2 \dfrac{6 \times 10}{15} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

(3) $\log_5 15 - \log_5 60 + \log_5 20 = \log_5 \dfrac{15 \times 20}{60} = \log_5 5 = 1$

(4) $\log_8 4 - \log_9 3 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} - \dfrac{\log_3 3}{\log_3 9} = \dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} - \dfrac{\log_3 3}{\log_3 3^2} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

解説

$\boxed{27}$ (1) $\log_5 x = -2$ から　$x = 5^{-2}$

よって　$x = \dfrac{1}{25}$

(2) $\log_2(11x+9) = 6$ から　$11x + 9 = 2^6$

すなわち　$11x + 9 = 64$

よって　$x = 5$

解説

$\boxed{28}$ $\log_{10} 3^{40} = 40 \log_{10} 3 = 40 \times 0.4771 = 19.084$

したがって　$3^{40} = 10^{19.084}$

ここで，$10^{19} < 10^{19.084} < 10^{20}$ であるから　$10^{19} < 3^{40} < 10^{20}$

よって，3^{40} は 20 けたの整数である。

解説

$\boxed{29}$ (1) $\lim_{h \to 0}(-5 - 2h) = -5$　(2) $\lim_{h \to 0}(7 - 3h + h^2) = 7$

解説

$\boxed{30}$ (1) $y' = (5x^2 - 7)' = 5(x^2)' - (7)' = 5 \times 2x = 10x$

(2) $y' = (x^3 + 3x - 1)' = (x^3)' + 3(x)' - (1)' = 3x^2 + 3$

(3) $y' = \left(\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + 5\right)' = \dfrac{1}{3}(x^3)' + 2(x^2)' - 4(x)' + (5)' = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 + 2 \times 2x - 4$

$= x^2 + 4x - 4$

(4) $y = (x+3)(x-4) = x^2 - x - 12$ から

$y' = (x^2 - x - 12)' = (x^2)' - (x)' - (12)' = 2x - 1$

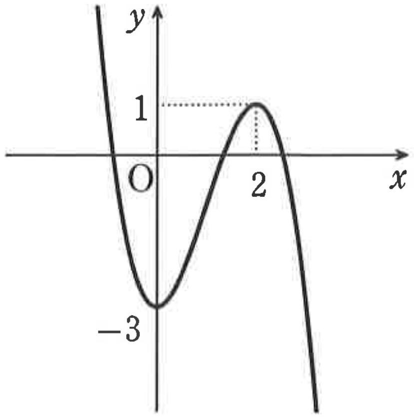
解説

$\boxed{31}$ (1) $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -3	↗	極大 1	↘



したがって，この関数は

$x=2$ で極大値 1 をとり，

$x=0$ で極小値 -3 をとる。

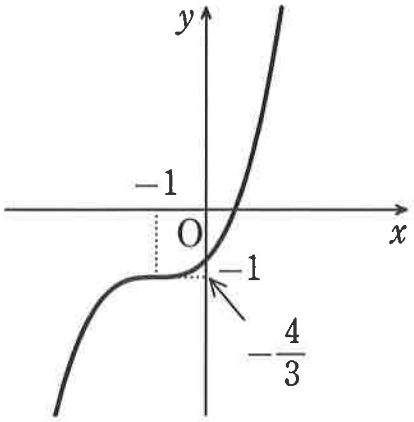
また，グラフは右の図のようになる。

(2) $y'=x^2+2x+1=(x+1)^2$

$y'=0$ とすると　　$x=-1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	$-\dfrac{4}{3}$	↗



したがって，グラフは右の図のようになる。

(解説)

32 C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int(3x^2-12x+5)\,dx=3\times\frac{x^3}{3}-12\times\frac{x^2}{2}+5x+C=x^3-6x^2+5x+C$

(2) $\displaystyle\int(x-7)(x+3)\,dx=\int(x^2-4x-21)\,dx=\frac{x^3}{3}-4\times\frac{x^2}{2}-21x+C$

$$=\frac{x^3}{3}-2x^2-21x+C$$

(解説)

33 (1) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(4x-9)\,dx=\Big[2x^2-9x\Big]_{-1}^{2}=(2\times2^2-9\times2)-\{2\times(-1)^2-9\times(-1)\}$

$$=(8-18)-(2+9)=-21$$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(2x^2-5x+2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$$=\left(\frac{2}{3}\times1^3-\frac{5}{2}\times1^2+2\times1\right)-\left\{\frac{2}{3}\times(-2)^3-\frac{5}{2}\times(-2)^2+2\times(-2)\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}+2\right)-\left(-\frac{16}{3}-10-4\right)=\frac{39}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_{1}^{3}(x^2+3x-6)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{1}^{3}$

$$=\left(\frac{3^3}{3}+\frac{3}{2}\times3^2-6\times3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+\frac{3}{2}\times1^2-6\times1\right)$$

$$=\left(9+\frac{27}{2}-18\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-6\right)=\frac{26}{3}$$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+2)(x-5)\,dx=\int_{-2}^{2}(x^2-3x-10)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-10x\right]_{-2}^{2}$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{3}{2}\times2^2-10\times2\right)-\left\{\frac{(-2)^3}{3}-\frac{3}{2}\times(-2)^2-10\times(-2)\right\}$$

$$=\left(\frac{8}{3}-6-20\right)-\left(-\frac{8}{3}-6+20\right)=-\frac{104}{3}$$

(解説)

$\boxed{34}$ (1) ① と向きが同じで大きさが等しいベクトルであるから　⑥

(2) ② と向きが反対で大きさが等しいベクトルであるから　⑤

(解説)

$\boxed{35}$ (1) $4\vec{a}-\vec{a}+5\vec{a}=(4-1+5)\vec{a}=8\vec{a}$

(2) $-\vec{a}+8\vec{b}+6\vec{a}-9\vec{b}=5\vec{a}-\vec{b}$

(3) $3\vec{a}-2(5\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=3\vec{a}-10\vec{a}+2\vec{b}+\vec{b}=-7\vec{a}+3\vec{b}$

(4) $-2(\vec{a}-\vec{b})+3(2\vec{a}-7\vec{b})=-2\vec{a}+2\vec{b}+6\vec{a}-21\vec{b}=4\vec{a}-19\vec{b}$

(解説)

$\boxed{36}$ (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分が等しくなるためには　$\begin{cases} x-2=3 & \cdots\cdots ① \\ y+5=-7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x=5$　　② から　$y=-12$

よって　$x=5$, $y=-12$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分が等しくなるためには　$\begin{cases} x+y=0 & \cdots\cdots ① \\ y-1=x+7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$y=-x$ ……③

これを ② に代入して　$-x-1=x+7$　　すなわち　$x=-4$

③ から　$y=4$

よって　$x=-4$, $y=4$

(解説)

$\boxed{37}$ (1) $\vec{a}+\vec{b}=(4,\ -1)+(-5,\ -3)=(4-5,\ -1-3)=(-1,\ -4)$

(2) $-7\vec{a}=-7(4,\ -1)=(-28,\ 7)$

(3) $5\vec{a}-6\vec{b}=5(4,\ -1)-6(-5,\ -3)=(20+30,\ -5+18)=(50,\ 13)$

(4) $-3(\vec{a}-2\vec{b})+4(6\vec{a}-3\vec{b})=-3\vec{a}+6\vec{b}+24\vec{a}-12\vec{b}=21\vec{a}-6\vec{b}$

$$=21(4,\ -1)-6(-5,\ -3)=(84+30,\ -21+18)$$

$$=(114,\ -3)$$

(解説)

$\boxed{38}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-4)\times(-3)+5\times(-2)=12-10=2$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 135^\circ=4\times7\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-14\sqrt{2}$

(解説)

$\boxed{39}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=6\times(-2)+x\times3=-12+3x$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ から　　$-12+3x=0$

よって　　$x=4$

(解説)

$\boxed{40}$ (1) $\dfrac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}$　　(2) $\dfrac{7\vec{b}+2\vec{c}}{2+7}=\dfrac{7}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$

(解説)

$\boxed{41}$ (1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+(-4)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-7)^2+(-6)^2}=\sqrt{94}$

(解説)

$\boxed{42}$ (1) $\vec{a}+\vec{b}=(-1,\ -7,\ 5)+(-6,\ 2,\ -9)=(-1-6,\ -7+2,\ 5-9)$

$=(-7,\ -5,\ -4)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(-1,\ -7,\ 5)-(-6,\ 2,\ -9)=(-1+6,\ -7-2,\ 5+9)$

$=(5,\ -9,\ 14)$

(3) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(-1,\ -7,\ 5)+3(-6,\ 2,\ -9)=(-2,\ -14,\ 10)+(-18,\ 6,\ -27)$

$=(-2-18,\ -14+6,\ 10-27)=(-20,\ -8,\ -17)$

(4) $3\vec{a}-2\vec{b}=3(-1,\ -7,\ 5)-2(-6,\ 2,\ -9)=(-3,\ -21,\ 15)-(-12,\ 4,\ -18)$

$=(-3+12,\ -21-4,\ 15+18)=(9,\ -25,\ 33)$

(解説)

$\boxed{43}$ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times6+(-2)\times2+(-3)\times(-4)=6-4+12=14$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{14}{\sqrt{14}\times2\sqrt{14}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=60^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+(-1)\times5+1\times(-1)=6-5-1=0$

$|\vec{a}|\neq0$, $|\vec{b}|\neq0$ で　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　　$\theta=90^\circ$

(解説)

44 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-x)+2\times2+x\times3=-x+4+3x=2x+4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ から　$2x+4=0$

よって　$x=-2$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(x-2)+(-8)\times(-4)+(-3)\times3=2x-4+32-9=2x+19$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ から　$2x+19=0$

よって　$x=-\dfrac{19}{2}$

(解説)

45 (1) $a_n=3+(n-1)\times(-7)=-7n+10$

よって　$a_{20}=-7\times20+10=-130$

$S=\dfrac{1}{2}\times20\times(3-130)=-1270$

(2) 初項 27，公差 -4 であるから　$a_n=27+(n-1)\times(-4)=-4n+31$

よって　$a_{20}=-4\times20+31=-49$

$S=\dfrac{1}{2}\times20\times(27-49)=-220$

(解説)

46 (1) $a_n=5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　$S=\dfrac{5\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{605}{81}$

(2) 初項 4，公比 3 であるから　$a_n=4\times3^{n-1}$

$S=\dfrac{4\times(3^5-1)}{3-1}=484$

(解説)

47 (1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 2 の等差数列であるから，その一般項は

$a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 -5 の等差数列であるから，その一般項は

$a_n=3+(n-1)\cdot(-5)=-5n+8$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は初項 -2，公比 3 の等比数列であるから，その一般項は

$a_n=-2\cdot3^{n-1}$

(4) 数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公比 -5 の等比数列であるから，その一般項は

$a_n=3\cdot(-5)^{n-1}$

(解説)

48 (1) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-a_n=6n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n=6n$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -3 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k = -3 + 6\sum_{k=1}^{n-1} k = -3 + 6 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n$$

よって　$a_n = 3n^2 - 3n - 3$　……①

初項は $a_1 = -3$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n = 3n^2 - 3n - 3$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1} - a_n = -3n^2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n = -3n^2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3k^2) = 1 - 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= 1 - 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} = 1 - \frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)$$

よって　$a_n = -n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$　……①

初項は $a_1 = 1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n = -n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

(3)　漸化式を変形すると　$a_{n+1} - a_n = 2n - 1$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n = 2n - 1$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -4 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = -4 + (n-1)^2$

よって　$a_n = n^2 - 2n - 3$　……①

初項は $a_1 = -4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n = n^2 - 2n - 3$

(4)　漸化式を変形すると　$a_{n+1} - a_n = 5^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_n = 5^n$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 5^k = 2 + \frac{5(5^{n-1} - 1)}{5-1} = 2 + \frac{1}{4}(5^n - 5)$$

よって　$a_n = \frac{1}{4}(5^n + 3)$　……①

初項は $a_1 = 2$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n = \frac{1}{4}(5^n + 3)$

（解説）

49 (1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

$a_n - 3 = b_n$ とおくと　$b_{n+1} = 2b_n$

また　$b_1=a_1-3=4-3=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

$a_n=b_n+3$ であるから　$a_n=2^{n-1}+3$

(2) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}+2=4(a_n+2)$

$a_n+2=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$

また　$b_1=a_1+2=1+2=3$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=3\cdot 4^{n-1}$

$a_n=b_n-2$ であるから　$a_n=3\cdot 4^{n-1}-2$

(3) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=-3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-3b_n$

また　$b_1=a_1-1=-2-1=-3$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -3，公比 -3 の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=-3\cdot(-3)^{n-1}=(-3)^n$

$a_n=b_n+1$ であるから　$a_n=(-3)^n+1$

(4) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

また　$b_1=a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n+3$ であるから　$a_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

(5) 漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-2\left(a_n-\dfrac{1}{3}\right)$

$a_n-\dfrac{1}{3}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=-2b_n$

また　$b_1=a_1-\dfrac{1}{3}=3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{8}{3}$，公比 -2 の等比数列である。

したがって，その一般項は　$b_n=\dfrac{8}{3}\cdot(-2)^{n-1}$

$a_n=b_n+\dfrac{1}{3}$ であるから　$a_n=\dfrac{8}{3}\cdot(-2)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

(6) $2a_{n+1}-3a_n=1$ から $\quad a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

この式を変形すると $\quad a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$

$a_n+1=b_n$ とおくと $\quad b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n$

また $\quad b_1=a_1+1=0+1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列である。

したがって，その一般項は $\quad b_n=1\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n-1$ であるから $\quad a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

解説

$\boxed{50}$ [1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1\times2=2 \qquad \text{右辺}=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$$

よって，$n=1$ のとき (A) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

$n=k+1$ のとき，(A) の左辺は

$$\begin{aligned}1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$ は，$n=k+1$ のときの (A) の右辺である。

よって，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について (A) が成り立つ。